متسلسلة تايلر و ماكلورين Taylor and Maclaurin Series

ان متسلسلة تايلور هي عبارة عن نشرأي دالة رياضية وتحويلها الى دالة كثيرة الحدود مما يسهل علينا إيجاد حلول تقريبية لمسألة ما إذا كان الحل الدقيق مستعصيا، ولمتسلسلة تايلر أهمية كبرى في الرياضيات الرقمية حيث تقوم العديد من الخوارزميات المعتمدة لحل المعادلات هناك على متسلسلة تايلور. كما أن الكثير من التطبيقات العملية هي تطبيقات لمتسلسلة تايلر وهناك الكثير من المعادلات التفاضلية لا يمكن حلها الا بالاعتماد على متسلسلة تايلر وسندرس حل المعادلات التفاضلية باستعمال المتسلسلات في المرحلة الثانية ان شاء الله .

تعريف : لتكن $f(x)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في الفترة $[a,b]$ فيمكننا كتابة مفكوك $f(x)$ عند c بالصورة :

$$f(x)=\frac{f(c)}{0!}+\frac{(x-c)f'(c)}{1!}+\frac{(x-c)^2f''(c)}{2!}+\cdots+\frac{(x-c)^nf^{(n)}(c)}{n!}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

تسمى هذه بمتسلسلة تايلر

مثال (١) أوجد متعددة حدود تايلر للدالة $f(x)=e^x$ عند النقطة $x=1$.

الحل : لاحظ هنا $f^{(n)}(x)=e^x$ لكل n أي ان $f^{(n)}(1)=e$ لكل n

$$\therefore e^x=e\left(1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{24}+\cdots\right)$$

$$=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$$

أما متسلسلة ماكلورين فهي حالة خاصة من متسلسلة تايلر عندما $c=0$ أي ان :

$$f(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{xf'(0)}{1!}+\frac{x^2f''(0)}{2!}+\cdots+\frac{x^nf^{(n)}(0)}{n!}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

مثال (٢) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = e^x$

الحل : لاحظ هنا $f^{(n)}(x) = e^x$ لكل n أي ان $f^{(n)}(0) = 1$ لكل n

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

مثال (٣) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = \cos x$.

الحل :

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$
$$f'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$
$$f''^{(x)} = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f''^{(0)} = -1$$
$$f^{(3)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = 1$$
$$f^{(5)}(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(0) = 0$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

مثال (٤) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $x^2 \sin x$.

الحل :

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(0) = 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

والآن نضرب النتيجة بـ x^2 فنحصل على

$$x^2 \sin x = x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!}$$

مثال (٥) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = \ln(x+1)$.

الحل :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \Rightarrow \quad f(0) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -(x+1)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2(x+1)^{-3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -6(x+1)^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(x) = -6$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{6x^4}{4!} + \cdots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

تمارين

جد مفكوك الدوال باستعمال متسلسلة تايلر عند النقطة a .

1. $f(x) = \ln x \quad , \quad a = 1$ 2. $f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad a = 4$

3. $f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad a = -1$ 4. $f(x) = \cos x \quad , \quad a = -\frac{\pi}{4}$

جد مفكوك الدوال باستعمال متسلسلة ماكلورين

5. $f(x) = e^{-x}$ 6. $f(x) = (1+x)^7$

7. $f(x) = \ln(x^2+1)$ 8. $f(x) = \sqrt{x+1}$

9. $f(x) = x\cos x$