متسلسلات الأعداد الحقيقية

Series of real numbers

في هذا البند سندرس تقارب و تباعد متسلسلات الأعداد الحقيقية.

يسمى التعبير

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

الذي يمكن اختصار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ المتسلسلة اللانهائية infinite series.

مثال.

a. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$

b. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

c. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$

d. $2 + 0 + 2 + 0 + \cdots$

تعريف. أن المجموع الجزئي S_n للمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ يكتب بالصورة

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

أما المتتابعة $\{S_n\}$ فإنها تسمى متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

مثال. أذا كانت لديك المتسلسلة $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ فان $S_{2n-1} = 1$ اما $S_{2n} = 0$.

تعريف. أذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ للمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متقاربة الى S عندئذٍ سنقول ان المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متقاربة convergent و مجموعها S .

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

أما إذا كانت $\{S_n\}$ متباعدة عندئذ سنقول ان المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متباعدة divergent.

ألان دعنا نلقي نظرة على بعض المتسلسلات و أمكانية اختبار تباعدها أو تقاربها و إيجاد مجموعها:

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة أم متباعدة. و أذا كانت متقاربة جد مجموعها.

a. $\sum_{i=1}^{\infty} i$

الحل.

في البداية نجد متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ألان لمعرفة أن المتسلسلة متقاربة أم لا نحتاج لان نختبر متتابعة مجاميعها الجزئية $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ متقاربة ام لا ؟ لاحظ ان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

و هذا يؤدي إلى أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه متباعدة إلى ∞ و بالتالي ستكون المتسلسلة متباعدة.

b. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$

الحل.

أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه هي:

$$\{S_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, \quad \frac{2^n-1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}, \dots\right\} = \left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\}$$

بما أن المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة إلى الواحد ستكون المتسلسلة أعلاه متقاربة و مجموعها يساوي 1.

c. $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i$

الحل.

أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه هي:

$$\{S_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1,0,1,0, \dots\}$$

و بما أن $lim_{n\to\infty} S_n$ غير موجودة ستكون المتسلسلة أعلاه متباعدة.

d. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^{i-1}}$

الحل.

أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه هي:

$$\{S_n\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^{i-1}} = \left\{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right\}$$

و بما ان

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}$$

بما أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه متقاربة ستكون المتسلسلة متقاربة و مجموعها يساوي $\frac{3}{2}$. أي ان

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^{i-1}} = \frac{3}{2}$$

ملاحظة.

1.ألان دعنا نأخذ $\lim_{n\to\infty}$ للحد n لكل متسلسلة في المثال اعلاه. سنلاحظ

المتسلسلة متباعدة $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

المتسلسلة متقاربة $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

المتسلسلة متباعدة $\lim_{n\to\infty} (-1)^n =$ غير موجودة

المتسلسلة متقاربة $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$

2.لاحظ أن أذا كانت المتسلسلة متقاربة فان غاية الحد n لها عندما $n \to \infty$ ستكون مساوية للصفر.

3. مبرهنة. أذا كانت المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متقاربة. فان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. أن عكس المبرهنة أعلاه لا يكون صحيحا دائماً. فإذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ فان المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ قد تكون متباعدة .

5 . لاحظ انه على الرغم من أن $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$ إلا ان المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة (سنبرهنها لاحقاً).

اختبار التباعد divergent test

مبرهنة. أذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فان $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ستكون متباعدة.

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2-n^3}{10+2n^3}$ متقاربة ام متباعدة

الحل. لاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n^3}{10+2n^3} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

بما أن الغاية للحد n للمتسلسلة أعلاه لا يساوي صفر لذا حسب المبرهنة أعلاه ستكون المتسلسلة متباعدة.

ملاحظة.

1. أذا كانت كل من $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متسلسلة متقاربة. فان كل من $\sum ca_n$ و $\sum(a_n \mp b_n)$ متسلسلة متقاربة.

2. $\sum(a_n \mp b_n) = \sum a_n \mp \sum b_n$ و $\sum ca_n = c\sum a_n$.

3. أذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة متباعدة فان $\sum ca_n$ ستكون متسلسلة متباعدة.

4. من الممكن أن تكون هناك متسلسلتين متباعدتين حاصل جمعهما يعطي متسلسلة متقاربة.

أنواع خاصة من المتسلسلات Special series

1. المتسلسلة الهندسية geometric series

المتسلسلة الهندسية هي المتسلسلة التي يمكن كتابتها بالصيغة

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \quad \text{أو} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

يسمى r أساس المتسلسلة و أن النسبة بين كل حد و الذي يسبقه هي r حيث $a \neq 0$.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n \implies S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

تكون المتسلسلة الهندسية متقاربة عندما تكون متتابعة مجاميعها الجزئية متقاربة. لذا دعنا نأخذ الغاية لمتتابعة مجاميعها الجزئية سنحصل على

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n$$

تكون الغاية أعلاه موجودة عندما $-1 < r < 1$. لا يمكن ان نجعل $r = 1$ لأننا سنحصل قسمة على صفر. بالتالي ستكون الغاية أعلاه موجودة عندما $-1 < r < 1$ لان $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ و بالتالي سنحصل على

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

من أعلاه نحصل على أن المتسلسلة الهندسية تكون متقاربة عندما $|r| < 1$ و مجموعها يساوي $\frac{a}{1-r}$.

مثال1. بين فيما أذا كانت المتسلسلات آلاتية متقاربة أم متباعدة. و أذا كانت متقاربة جد مجموعها

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

الحل. لاحظ أن $r = \frac{1}{2},\ a = 1,\ |r| = \frac{1}{2} < 1$ لذا ستكون المتسلسلة متقاربة و مجموعها يساوي 2.

$$b.\ \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1}$$

الحل.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-(n-2)}4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{9^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\frac{4^2}{9-1}$$
$$= 16(9)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} 144\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \qquad (*)$$

المتسلسلة (*) هندسية فيها $a = 144, r = \frac{4}{9} < 1$. من هذا سنحصل على ان المتسلسلة أعلاه متقاربة و مجموعها

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = \frac{144}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}(144) = \frac{1296}{5}.$$

تمرين. بين فيما أذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}}$ متقاربة ام متباعدة. و أذا كانت متقاربة جد مجموعها.

مثال2. استخدم المثال أعلاه لإيجاد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1}$.

الحل.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = 9^2(4) + \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = 324 + \frac{1296}{5} = \frac{2916}{5}.$$

تمرين. استخدم المثال1 أعلاه لإيجاد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1}$.

2. متسلسلة التليسكوب telescoping series

أن اسم المتسلسلة أعلاه يأتي عن ماذا يحدث مع مجاميعها الجزئية. و يمكن فهم ذلك من المثال الأتي:

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة أم متباعدة. و أذا كانت متقاربة جد مجموعها أن كانت متقاربة

$$a.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$$

الحل.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i^2+3i+2} \qquad (**)$$

يمكن استخدام تجزئة الكسور للحصول على

$$\frac{1}{i^2+3i+2}=\frac{1}{(i+2)(i+1)}=\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2},$$

بالتعويض في (**) نحصل على

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+2}$$

لاحظ أننا حذفنا جميع الحدود ألا الحدين الأول و الأخير. و هذا أصل اسم متسلسلة التليسكوب.

و ألان

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=1$$

بما أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه متقاربة إلى 1 ستكون المتسلسلة متقاربة و مجموعها يساوي 1 .

$$b.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$$

الحل.

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2+4i+3}\qquad(**)$$

يمكن استخدام تجزئة الكسور للحصول على

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2+4i+3}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{2}}{i+1}-\frac{\frac{1}{2}}{i+3}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right]$$

و ألان

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{12}$$

بما أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه متقاربة إلى 5/12 ستكون المتسلسلة متقاربة و مجموعها يساوي 5/12 .

ملاحظة. ليست كل متسلسلة يمكن تجزئة كسرها تدعى متسلسلة التليسكوب. لكي نحصل على متسلسلة التليسكوب يجب أن تكون هناك حدود قابلة للحذف فيها. أن المتسلسلة آلاتية لا تكون متسلسلة تليسكوب لان جميع حدودها موجبة و لا يمكن الحذف فيها:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2n}{n^2+3n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

تمرين. جد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2+4n+3}-9^{-n+2}4^{n+1}\right)$.

3. المتسلسلة التوافقية harmonic series

تأخذ المتسلسلة التوافقية الصيغة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و تكون متباعدة (سنبرهن هذا فيما بعد) .

مثال. برهن أن كلاً من المتسلسلات الآتية متباعدة

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n} \qquad b.\ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n}$$

الحل.

$a.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة سنحصل على ان $5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة ايضاً.

$b.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)-\frac{11}{6}$

و ألان بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة فإننا عندما نطرح منها عدداً ثابتاً سنحصل على متسلسلة متباعدة ايضاً.

ملاحظة. عندما نجمع أو نطرح عدد ثابت لمتسلسلة متقاربة (متباعدة) فإننا سنحصل على متسلسلة متقاربة (متباعدة) .

اختبار التكامل *integral test*

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة و موجبة و متناقصة على الفترة $[k,\infty)$ و كذلك $f(n)=a_n$ فان

1. أذا كان $\int_k^{\infty}f(x)dx$ متقارب فان المتسلسلة $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ ستكون متقاربة.
2. أذا كان $\int_k^{\infty}f(x)dx$ متباعد فان المتسلسلة $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ ستكون متباعدة.

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة أم متباعدة

$$a.\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \qquad b.\ \sum_{n=0}^{\infty}n\,e^{-n^2}$$

الحل. *a*. من الواضح أن الدالة $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ موجبة. و ازدياد قيم x في المقام يؤدي الى تناقص الدالة و بالتالي سنحصل على أن الدالة متناقصة. بقي أن نجد التكامل

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\,lnx}dx=\lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{1}{x\,lnx}dx=\lim_{t\to\infty}(ln\,ln\,x)|_2^t$$
$$=\lim_{t\to\infty}(ln\,ln\,t)-ln\,ln\,2=\infty.$$

بما أن قيمة التكامل غير منتهية سنحصل على أن المتسلسلة أعلاه متباعدة حسب اختبار التكامل.

b. من الواضح أن الدالة $f(x) = x\,e^{-x^2}$ موجبة. لاحظ $\acute{f}(x) = (1-2x^2)\,e^{-x^2}$ اما النقاط الحرجة للدالة هي $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ و بما ان n تبدأ من الصفر سنهمل $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و باختبار اشارة $\acute{f}(x)$ سنحصل على ان الدالة متزايدة على الفترة $\left[0\,\frac{1}{\sqrt{2}},\right]$ و متناقصة على الفترة $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right]$. و بالتالي سنحصل على أن الدالة متناقصة. كما أن

$$\int_0^{\infty} x\,e^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} x\,e^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_0^{t}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right) = \frac{1}{2}$$

بما أن قيمة التكامل منتهية سنحصل على أن المتسلسلة أعلاه متقاربة حسب اختبار التكامل.

تمرين. برهن باستخدام اختبار التكامل أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة في حين ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة.

اختبار المتسلسلة- p *the p-series test*

أذا كانت $k > 0$ فان $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ تكون متقاربة عندما $p > 1$ و متباعدة عندما $p \le 1$.

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلتين $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^7}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متقاربة ام متباعدة.

تمرين. اختبر تقارب و تباعد المتسلسلات الآتية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}n}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100}$$

اختبار المقارنة *comparison test*

لاحظنا مسبقاً كيف نستخدم التكامل المعتل لاختبار تقارب متسلسلة معينة. على الرغم من ان اختبار التكامل من الاختبارات البسيطة لكننا في بعض الأحيان لا نستطيع أن نكامل الدالة بسهولة لنعرف فيما أذا كانت متقاربة أم متباعدة. و ألان لو كانت لديك المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3^n}$ لاستخدام اختبار التكامل يجب أن نجد التكامل $\int_0^{\infty}\frac{1}{x+3^x}dx$ و نحن غير متأكدين فيما اذا كان بالإمكان ايجاد هذا التكامل. لحس الحظ يمكن ان يكون هناك اختبار اخر يمكن استخدامه بسهولة مع المتسلسلة اعلاه سنسميه *اختبار المقارنة*.

اختبار المقارنة *comparison test*

لتكن كل من $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متسلسلة بحيث ان $a_n, b_n \geq 0$ لكل n و لدينا $a_n \leq b_n$ لكل n فان

1. أذا كانت $\sum b_n$ متسلسلة متقاربة ستكون $\sum a_n$ متسلسلة متقاربة.
2. أذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة متباعدة ستكون $\sum b_n$ متسلسلة متباعدة.

ملاحظة. أذا كانت لدينا متسلسلتين بحيث أن مثلاً الحدود الخمسة الأولى منهما لا تحقق الشرط $a_n, b_n \geq 0$ او لا تحقق الشرط $a_n \leq b_n$ فيمكننا اهمالها و البدء من المكان الذي يحقق الشرطين اعلاه. عند ئذ يمكن استخدام الاختبار.

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة آو متباعدة

$$a.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3^n}$$

لاحظ أن $\frac{1}{n+3^n} < \frac{1}{3^n}$ هذا يؤدي الى ان المتسلسلة متقاربة حسب اختبار المقارنة.

$$b.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-cos^2(n)}$$

لاحظ أن $cos^2(n)$ محصورة بين 1- و 1 لذا سوف لا تكون كبيرة جداً عندما تقترب n من المالانهاية. لذا ستتصرف حدود المتتابعة بشكل مشابه لـ $\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$ و التي ستولد متسلسلة متباعدة. لذا يمكن ان نحزر ان المتسلسلة اعلاه متباعدة الا اننا سنبرهن هذا حسب اختبار المقارنة. دعنا نبحث عن متسلسلة متباعدة اصغر من المتسلسلة أعلاه

و بما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متسلسلة متباعدة لذا ستكون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-cos^2(n)}$ متباعدة حسب اختبار المقارنة.

$$c.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^4+5}$$

في هذه الحالة لا تضيف 2 و 5 أي شيء على المتسلسلة لذا سيكون سلوك المتسلسلة مشابه إلى $\frac{n^2}{n^4}=\frac{1}{n^2}$ التي ستكون متقاربة. لذا يمكن ان نحزر ان المتسلسلة اعلاه متقاربة. و بالتالي سنحتاج ان نجد متسلسلة متقاربة اكبر منها.

$$\frac{n^2+2}{n^4+5}<\frac{n^2+2}{n^4}$$

و بما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^4}$ هي حاصل جمع متسلسلتين متقاربتين ستكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^4}$ متقاربة و حسب اختبار المقارنة سنحصل على أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^4+5}$ متقاربة.

في بعض الأحيان يصعب أن نعرف تباعد أو تقارب متسلسلة لذا يمكن استخدام نوع أخر من الاختبارات سنسميه اختبار غاية المقارنة limit comparison test .

اختبار غاية المقارنة *limit comparison test*

لتكن كل من $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متسلسلة بحيث ان $a_n, b_n \geq 0$ لكل n و ليكن

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

أذا كان $0<c<\infty$ فان كلا المتسلسلتين متقاربة او كلاهما متباعدة.

ملاحظة. يمكن أن نضع $c=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ فان هذا يعطي نفس النتيجة. عادة نختار البسط و المقام للحصول على حساب أسهل للغاية.

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة

$$a.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$$

دعنا نختار المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. لاحظ ان

$$c=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n}\,\frac{3^n-n}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{3^n}\right)$$

ألان نحتاج قاعدة لوبتال مع الحد الثاني لكي نحصل على

$$c = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n \ln 3} = 1, 0 < c = 1 < \infty$$

من هذا سنحصل على أن كلا المتسلسلتين متقاربة .

$$b. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}}$$

لاحظ أن البسط و المقام عبارة عن متعددة حدود أو متعددة حدود تحت جذر و بالتالي ستسلك حدودها كالأتي

$$\frac{n^2}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{n^2}{n^{\frac{7}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$$

و التي تعطي متسلسلة متباعدة حسب اختبار- p . الان

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n}{\sqrt[3]{n^7+n^3}} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^{\frac{7}{3}}+n^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{n^7(1+\frac{1}{n^4})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{7}{3}}(4+\frac{1}{n})}{n^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}} = 4, 0 < c = 4 < \infty$$

من هذا سنحصل على أن كلا المتسلسلتين متباعدة لان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ متباعدة.

اختبار المتسلسلات المتناوبة الإشارة *alternating series test*

في الاختبارين الأخيرين احتجنا أن تكون جميع حدود المتسلسلة موجبة. بالطبع أن هناك الكثير من المتسلسلات التي تتضمن حدود سالبة. ألان دعنا نقدم اختبار لمثل هذا النوع من المتسلسلات.

المتسلسلة متناوبة الإشارة **alternating series**. هي أية متسلسلة يمكن كتابة حدودها بأحد الصيغتين الآتيتين:

$$a_n = (-1)^n b_n, \qquad b_n \geq 0$$

$$a_n = (-1)^{n+1} b_n, \qquad b_n \geq 0$$

اختبار المتسلسلات المتناوبة الإشارة ***alternating series test***

لتكن $\sum a_n$ متسلسلة بحيث أن $a_n = (-1)^n b_n$ او $a_n = (-1)^{n+1} b_n$ و $b_n \geq 0$. اذا كان

1. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
2. $\{b_n\}$ متتابعة متناقصة

فان المتسلسلة $\sum a_n$ ستكون متقاربة.

ملاحظة.

1. أن الاختبار أعلاه يخبرنا فقط عن تقارب المتسلسلة و لا يخبرنا عن أي شيء عن تباعدها.
2. يمكن أن نستخدم هذا الاختبار أذا كان عدد منته من الحدود الأولى للمتسلسلة متزايدة.

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ المتسلسلة التوافقية المتناوبة الاشاره *alternating harmonic series*

لاحظ أن $b_n = \frac{1}{n}$ و

1. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $b_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = b_{n+1}$

لذا سنحصل على أن المتسلسلة أعلاه متقاربة حسب اختبار المتسلسلات المتناوبة.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2+5}$

لاحظ

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+5} = 1 \neq 0$$

أن الشرط الأول غير متحقق لذا لا داعي للتأكد من الشرط الثاني. لذا دعنا نبحث عن اختبار أخر للتقارب. في مثل هذه الحالات من الأفضل أن نستخدم اختبار التباعد.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2+5} = \left(\lim_{n\to\infty}(-1)^n\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+5}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}(-1)^n\right)(1)$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}(-1)^n\right) \text{ غير موجودة}$$

بما إن الغاية أعلاه غير موجودة سنحصل باستخدام اختبار التباعد أن المتسلسلة أعلاه متباعدة.

$$c.\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$$

لاحظ أن $\cos n\pi = (-1)^n$. لذا يمكن كتابة المتسلسلة اعلاه بالصيغة

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ .$$

لذا سيكون لدينا

$$1.\ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$2.\ b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = b_{n+1}$$

بما أن كلا الشرطين متحققين سنحصل على أن المتسلسلة أعلاه متقاربة حسب اختبار تقارب المتسلسلات المتناوبة.

تمرين. بين فيما أذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}\sqrt{n}}{n+4}$ متقاربة او متباعدة.

التقارب المطلق *absolute convergence*

و هو نوع أقوى من التقارب الاعتيادي. دعنا نبدأ بتعريفه.

تعريف. تدعى المتسلسلة $\sum a_n$ **مطلقة التقارب** *absolute convergence* أذا كانت المتسلسلة $\sum|a_n|$ متقاربة. و أذا كانت $\sum a_n$ متقاربة في حين ان $\sum|a_n|$ متباعدة عندئذ سنسمي المتسلسلة $\sum a_n$ **مشروطة التقارب** *conditional convergence*.

ملاحظة.

1. أذا كانت المتسلسلة مطلقة التقارب فأنها تكون متقاربة.
2. تؤكد الحقيقة أعلاه أن التقارب المطلق أقوى من التقارب الاعتيادي. لأنه يعطي التقارب الاعتيادي.

3. أذا كانت المتسلسلة متقاربة فانه ليس من الضروري أن تكون مطلقة التقارب.

مثال. بين اياً من المتسلسلات الآتية مطلقة التقارب و اياً منها مشروطة التقارب.

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

لاحظنا مسبقاً أن تلك المتسلسلة متقاربة. و هي مشروطة التقارب لان

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

و هي متباعدة كما مر مسبقاً في اختبار التكامل.

$$b.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n^2}$$

أن هذه المتسلسلة مطلقة التقارب لان

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

متقاربة حسب اختبار المتسلسل-p- و هذا يعطي أن المتسلسلة متقاربة.

$$c.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$$

أن المتسلسلة أعلاه ليست متناوبة لذا فأننا لا نستخدم اختبار المتسلسلات المتناوبة الإشارة هنا و أنما سنختبرها فيما أذا كانت متقاربة أم متباعدة. لاحظ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3}$$

لدينا

$$\frac{|\sin n|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$$

و ألان نحن نعلم أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ هي متسلسلة متقاربة لذا حسب اختبار المقارنة ستكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3}$ متقاربة و بالتالي ستكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$ مطلقة التقارب.

اختبار النسبة *ratio test*

في هذا الموضوع سنلقي نظرة على اختبار لمعرفة فيما أذا كانت متسلسلة ما مطلقة التقارب أم لا . نحن نعرف انه أذا كانت المتسلسلة مطلقة التقارب فأنها تكون متقاربة لذا سيخبرنا هذا الاختبار فيما أذا كانت المتسلسلة متقاربة أم لا.

اختبار النسبة *ratio test*

لتكن $\sum a_n$ متسلسلة و ليكن

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

فان

1. أذا كان $L < 1$ فان المتسلسلة مطلقة التقارب و بالتالي ستكون متقاربة.
2. أذا كان $L > 1$ فان المتسلسلة متباعدة .
3. أذا كان $L = 1$ فان المتسلسلة قد تكون متباعدة أو مشروطة التقارب أو مطلقة التقارب (لذا نستخدم اختبار أخر في هذه الحالة) .

مثال. بين أيا من المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة.

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$$

لاحظ أن

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)} \frac{4^{2n+1}(n+1)}{(-10)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{-10(n+1)}{4^2(n+2)}$$

$$= \frac{10}{16} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{10}{16} < 1$$

بما أن $L < 1$ لذا حسب اختبار النسبة سنحصل على ان المتسلسلة اعلاه متقاربة.

$$b.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \frac{5^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{5n!} = \infty > 1$$

بما أن $L > 1$ لذا حسب اختبار النسبة سنحصل على ان المتسلسلة اعلاه متباعدة.

$$c.\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)!}\frac{(2n-1)!}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{(2n+1)!}\frac{(2n-1)!}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}\frac{(2n-1)!}{n^2}\right) = 0 < 1$$

بما أن $L < 1$ لذا حسب اختبار النسبة سنحصل على ان المتسلسلة اعلاه متقاربة.

$$d.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+1}\frac{n^2+1}{(-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 1$$

بما أن $L = 1$ سوف لن يخبرنا شيئاً اختبار النسبة هنا. لذا سنلجأ الى اختبار اخر و هو اختبار المتسلسلات المتناوبة الاشارة. لاحظ ان

1. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0.$

2. $b_n = \frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1} = b_{n+1}$

من هذا سنحصل على أن المتسلسلة متقاربة.

$$e.\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{2n+7}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+3}{2(n+1)+7}\frac{2n+7}{n+2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)(2n+7)}{(2n+9)(n+2)} = 1$$

بما أن $L = 1$ سوف لن يخبرنا شيئاً اختبار النسبة هنا. لذا سنلجأ الى اختبار اخر و هو اختبار التباعد. لاحظ ان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+7} = \frac{1}{2} \neq 0$$

من هذا سنحصل على أن المتسلسلة متباعدة حسب اختبار التباعد.

اختبار الجذر *root test*

هذا أخر اختبار سندرسه. كما هو الحال في اختبار النسبة سيخبرنا اختبار الجذر فيما أذا كانت متسلسلة مطلقة التقارب أم لا.

اختبار الجذر *root test*

لتكن $\sum a_n$ متسلسلة و ليكن

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

فان

1. أذا كان $L < 1$ فان المتسلسلة مطلقة التقارب و بالتالي ستكون متقاربة.
2. أذا كان $L > 1$ فان المتسلسلة متباعدة .
3. أذا كان $L = 1$ فان المتسلسلة قد تكون متباعدة أو مشروطة التقارب أو مطلقة التقارب (لذا نستخدم اختبار أخر في هذه الحالة) .

ملاحظة. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

مثال. بين اياً من المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة.

$a.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^n}{3^{1+2n}}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^{\frac{1}{n}+2}} = \infty > 1$$

بما أن $L > 1$ لذا حسب اختبار الجذر سنحصل على أن المتسلسلة أعلاه متباعدة.

$b.\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right| = \left|-\frac{3}{7}\right| < 1$$

بما أن $L < 1$ لذا حسب اختبار الجذر سنحصل على ان المتسلسلة اعلاه متقاربة.

$$c.\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-12)^n}{n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-12)^n}{n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n^{\frac{1}{n}}} = 12 > 1$$

بما أن $L > 1$ لذا حسب اختبار الجذر سنحصل على ان المتسلسلة اعلاه متباعدة.