اختبار النسبة *ratio test*

في هذا الموضوع سنلقي نظرة على اختبار لمعرفة فيما أذا كانت متسلسلة ما مطلقة التقارب أم لا . نحن نعرف انه أذا كانت المتسلسلة مطلقة التقارب فأنها تكون متقاربة لذا سيخبرنا هذا الاختبار فيما أذا كانت المتسلسلة متقاربة أم لا.

اختبار النسبة *ratio test*

لتكن $\sum a_n$ متسلسلة و ليكن

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

فان

1.أذا كان $L < 1$ فان المتسلسلة مطلقة التقارب و بالتالي ستكون متقاربة.

2.أذا كان $L > 1$ فان المتسلسلة متباعدة .

3. أذا كان $L = 1$ فان المتسلسلة قد تكون متباعدة أو مشروطة التقارب أو مطلقة التقارب (لذا نستخدم اختبار أخر في هذه الحالة) .

مثال. بين أيا من المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة.

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$$

لاحظ أن

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)} \frac{4^{2n+1}(n+1)}{(-10)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{-10(n+1)}{4^2(n+2)}$$

$$= \frac{10}{16} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{10}{16} < 1$$

بما أن $L < 1$ لذا حسب اختبار النسبة سنحصل على ان المتسلسلة اعلاه متقاربة.

$$b.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \frac{5^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{5n!} = \infty > 1$$

بما أن $L > 1$ لذا حسب اختبار النسبة سنحصل على ان المتسلسلة اعلاه متباعدة.

$$c.\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)!}\frac{(2n-1)!}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{(2n+1)!}\frac{(2n-1)!}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}\frac{(2n-1)!}{n^2}\right) = 0 < 1$$

بما أن $L < 1$ لذا حسب اختبار النسبة سنحصل على ان المتسلسلة اعلاه متقاربة.

$$d.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+1}\frac{n^2+1}{(-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 1$$

بما أن $L = 1$ سوف لن يخبرنا شيئاً اختبار النسبة هنا. لذا سنلجأ الى اختبار اخر و هو اختبار المتسلسلات المتناوبة الاشارة. لاحظ ان

1. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0.$

2. $b_n = \frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1} = b_{n+1}$

من هذا سنحصل على أن المتسلسلة متقاربة.

$$e.\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{2n+7}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+3}{2(n+1)+7}\frac{2n+7}{n+2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)(2n+7)}{(2n+9)(n+2)} = 1$$

بما أن $L = 1$ سوف لن يخبرنا شيئاً اختبار النسبة هنا. لذا سنلجأ الى اختبار اخر و هو اختبار التباعد. لاحظ ان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+7} = \frac{1}{2} \neq 0$$

من هذا سنحصل على أن المتسلسلة متباعدة حسب اختبار التباعد.

اختبار الجذر *root test*

هذا أخر اختبار سندرسه. كما هو الحال في اختبار النسبة سيخبرنا اختبار الجذر فيما أذا كانت متسلسلة مطلقة التقارب أم لا.

اختبار الجذر *root test*

لتكن $\sum a_n$ متسلسلة و ليكن

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

فان

1. أذا كان $L < 1$ فان المتسلسلة مطلقة التقارب و بالتالي ستكون متقاربة.
2. أذا كان $L > 1$ فان المتسلسلة متباعدة .
3. أذا كان $L = 1$ فان المتسلسلة قد تكون متباعدة أو مشروطة التقارب أو مطلقة التقارب (لذا نستخدم اختبار أخر في هذه الحالة) .

ملاحظة. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

مثال. بين اياً من المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة.

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^n}{3^{1+2n}}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^{\frac{1}{n}+2}} = \infty > 1$$

بما أن $L > 1$ لذا حسب اختبار الجذر سنحصل على أن المتسلسلة أعلاه متباعدة.

$$b.\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right| = \left|-\frac{3}{7}\right| < 1$$

بما أن $L < 1$ لذا حسب اختبار الجذر سنحصل على ان المتسلسلة اعلاه متقاربة.

$$c.\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-12)^n}{n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-12)^n}{n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n^{\frac{1}{n}}} = 12 > 1$$

بما أن $L > 1$ لذا حسب اختبار الجذر سنحصل على ان المتسلسلة اعلاه متباعدة.