المحاضرة السادسة

أمثلة محلولة

مثال(7-5):أوجد النهايات التالية بالإعتماد على خواص النهايات والنهايات الشهيرة

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=1\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}\cos x}$$

$$=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-4)}{x+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}}=\frac{4}{\infty}=0$$

- تذكر أن حالات عدم التعيين :

$$\frac{\infty}{\infty};\frac{0}{0};\infty\times 0;\infty-\infty;$$

لإزالتها يمكننا أن نستخدم أي من التحليل الجبري والإختصار والضرب والقسمة والجمع والطرح إن كان ممكناً حسب طبيعة المسألة .

1. قاعدة أوبيتال (لوبيتال)في حساب النهايات *Lopital Rule*

إذا كان لدينا $f, g: \mathrm{A} \to \mathrm{R}$ تابعان حقيقيان وكان $a \in R$, $a = \pm\infty$ أو أي قيمة أخرى وكان لدينا $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ فإن:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- يمكن استخدام القاعدة أكثر من مرة

مثال(5-8): أوجد نهاية

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

الحل:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

نستخدم قاعدة أوبيتال لإزالته:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)^{`}}{(x)^{`}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

أمثلة محلولة

مثال(5-9): أوجد النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = 1$$

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$

$= \frac{\sin 2\frac{\pi}{4} - \cos 2\frac{\pi}{4} - 1}{\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1-0-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x - (-2\sin 2x)}{\cos x - (-\sin x)} = \frac{2\cos 2\frac{\pi}{4} + 2\sin 2\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2(0)+2(1)}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \frac{2}{2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

3) $\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$

$= \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 16} \frac{\left(x^{\frac{1}{4}} - 2\right)'}{\left(x^{\frac{1}{2}} - 4\right)'} = \lim_{x\to 16} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(x^{\frac{1}{4}-1}\right)}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}} = \lim_{x\to 16} \frac{\frac{1}{4}(x)^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{4}(16)^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2}(16)^{-\frac{1}{2}}}$

$= \frac{2}{4}(16)^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left((16)^{+\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

4) $\lim_{x\to 2} \frac{(2-x)\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\cos\frac{\pi}{4}x} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 2} \frac{(-1)\sin\left(\frac{\pi}{4}(2)\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4}x\right)(2-2)}{-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}x} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{-1}{-\frac{\pi}{4}(1)} = \frac{4}{\pi}$

$$5) - \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

عدم تعيين نزيله باستخدام أوبيتال.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

عدم تعيين ثانٍ نزيله باستخدام أوبيتال.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

2. منشور تايلور وماك لوران للدوال *Taylor and Mac Laurent Series*

إن الهدف من متسلسلة تايلور (منشور تايلور أو مفكوك تايلور) هو تحويل دالة يصعب التعامل معها إلى كثير حدود غير منتهي يسهل التعامل معه (يتم أخذ 5 أو6 حدود وكلما زاد عدد الحدود كانت الدالة الناتجة أكثر تطابقاً مع الدالة الأصلية).

دستور نشر تايلور $f(x)$ حول النقطة c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} \frac{(x-c)^n}{n!} = f(c) + f\grave{(c)}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

ملاحظة: إذا كانت $c = 0$ سميت المتسلسلة السابقة بمتسلسلة ماكلورين (أو ماك لوران) للإقتران $f(x)$.

$$F(x) = f(0) + f^{(1)}\grave{(0)} \frac{x}{1!} + f^{(2)}(0) \frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0) \frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0) \frac{\mathrm{x}^n}{n!}$$

أمثلة محلولة

مثال(5-10): أوجد متسلسلة ماكلورين $f(x)=e^{-2x}$

$$f(x)=e^{-2x} \to f(0)=1$$
$$f\grave{(}x)=-2e^{-2x} \to f\grave{(}0)=-2$$
$$f^{(2)}(\mathrm{x})=4e^{-2x} \to f^{(2)}(0)=4$$
$$f^{(3)}(x)=-8e^{-2x} \to f^{(3)}(0)=-8$$
$$f^{(4)}(x)=16e^{-2x} \to f^{(4)}(0)=16$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}\frac{x^n}{n!}=f(0)+f\grave{(}0)\frac{x}{1!}+f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\cdots$$
$$=1+\frac{-2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{-8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-2)^n x^n}{n!}+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n!}$$

مثال(5-11): أوجد منشور تايلور للدالة $f(x)=\sin x$ عند $c=\frac{\pi}{4}$

الحل:

$$f(x)=\sin x \to f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f\grave{(}x)=+\cos x \to f\grave{}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f^{(2)}(\mathrm{x})=-\sin x \to f^{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f^{(3)}(x)=-\cos x \to f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \to f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f^{(5)}(x) = \cos x \to f^{(5)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f^{(6)}(x) = -\ \sin x \to f^{(6)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$f^{(7)}(x) = -\cos x \to f^{(7)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} \frac{(x-c)^n}{n!} = f(c) + f\grave{(c)}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} \frac{(x-c)^n}{n!}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} \frac{(x-c)^n}{n!}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}\right]$$

2.1. متسلسلة ذات الحدين *Binomial Series*

تسمى متسلسلة ماكلورين للإقتران $\boldsymbol{(1+x)^n}$ متسلسلة ذات الحدين.

أمثلة محلولة

مثال(5-13): أوجد متسلسلة ماكلورين ذات الحدين للدالة $f(x)=(1+x)^k$.

الحل:

$$
\begin{aligned}
&f(x)=(1+x)^k \rightarrow f(0)=1\\
&\grave{f}(x)=k(1+x)^{k-1} \rightarrow \grave{f}(0)=k\\
&f^{(2)}(x)=k(k-1)(1+x)^{k-2} \rightarrow f^{(2)}(0)=k(k-1)\\
&f^{(3)}(x)=k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} \rightarrow f^{(3)}(0)=k(k-1)(k-2)\\
&f^{(4)}(x)=k(k-1)(k-2)(k-3)(1+x)^{k-4} \rightarrow f^{(4)}(0)\\
&\qquad =k(k-1)(k-2)(k-3)
\end{aligned}
$$

إذاً متسلسلة ذات الحدين هي:

$$
\begin{aligned}
&f(0)+\grave{f}(0)x+\frac{f(\ddot{0})x^2}{2!}+\frac{f(\dddot{0})x^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!}+\cdots+\frac{f^{(x)}(0)x^n}{n!}+\cdots\\
&=1+kx+\frac{k(k-1)x^2}{2!}+\frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!}+\cdots\\
&\qquad +\frac{k(k-1)(k-2)(k-n+1)x^n}{n!}+\cdots
\end{aligned}
$$

مثال(5-14): أوجد متسلسلة ذات الحدين للدالة $f(x)=\sqrt{1+x}$.

الحل:

$$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$1+kx+\frac{k(k-1)x^2}{2!}+\frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!}+\cdots$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots\big(k-(n-1)\big)x^n}{n!}$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{(1)(3)x^3}{2^3\cdot 3!}-\frac{(1)(3)(5)x^4}{2^4\cdot 4!}+\cdots$$

لأن:

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3}{3!}+\cdots$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left[\frac{1}{2}-(n-1)\right]x^n}{n!}$$
$$=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-3)x^n}{2^n\cdot n!}$$
$$=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2n-3)!!x^n}{2^n\cdot n!}$$

مثال(5-15): أوجد متسلسلة ذات الحدين للدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

<u>الحل:</u>

$$f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$1+kx+\frac{k(k-1)x^2}{2!}+\frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!}+\cdots$$
$$f(x)=(1-x)^k\Rightarrow f(0)=1$$
$$\grave{f}(x)=k(1-x)^{k-1}\Rightarrow \grave{f}(0)=-\frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}(1)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$$
$$\ddot{f}(x)=k(k-1)\frac{(1-x)^{k-2}}{2!}\Rightarrow \ddot{f}(0)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-2}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(1)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}$$

$$f^{(3)} = k(k-1)(k-2)\frac{(1-x)^{k-3}}{3!} \Rightarrow f^{(3)}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\frac{(1)^{-\frac{1}{2}-3}}{3!} = -\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1!} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{x^3}{3!} +$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{(1)(3)(5)\ldots(2(n+1)-3)x^n}{2^n \cdot n!} =$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(2(n+1)-3)!!\, x^n}{2^n \cdot n!}$$

الفصل السادس

التفاضل (الإشتقاق)

(*Calculus*)*Differentials*

1. تعريف الإشتقاق *Differential Definition*

لتكن لدينا النقطة **x** من مجموعة تعريف الدالة **y =f(x)** وكان لها جوار بحيث **f** معرفة فيه عندئذٍ تكون الدالة **f** قابلة للإشتقاق في النقطة **x** إذا وفقط إذا وجدت النهاية

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ندعو النهاية هذه بمشتق الدالة **f** عند **x** ونرمز لها بالرمز $f`(x)$ أو $\frac{df}{dx}$ كما

إن Δx يمثل مقدار التغير من x_1 **إلى** x_2 أي $\Delta x = x_2 - x_1$

إن ميل المستقيم المماس للمنحني $y= f(x)$ في نقطة منه $m_0(x_0, f(x_0))$ يسمى الميل عند هذه النقطة بالمشتق كمافي الشكل رقم (1)

تذكر أن :

ميل المستقيم $D = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ بحيث أن $m(x, f(x))$

2. مشتقات الدوال الشهيرة *Derivatives of Common Functions*

إن مشتقات الدوال الشهيرة معطاة كما في الجدول رقم (2)

جدول رقم (2) : صيغ مشتقات الدوال المعروفة **Common Derivatives Formulas**	
f (x)	**f`(x) /derivative of f**
1) $y = a$; **عددثابت** a	$y` = 0$
2) $y = x$; **هو متحول** x	$y` = 1$
3) $y = x^n$; **عددثابت** n	$y` = n\,(x)^{n-1}$
4) $y = u^n(x)$; **عددثابت** n	$y` = n\,u`(x)\,u(x)^{n-1}$
5) $y = sin\,u(x)$; $u(x)$**تابع**	$y` = u`(x)\cos u(x)$
6) $y = \cos u(x)$	$y` = -u`(x)\,sin\,u(x)$
7) $y = e^{u(x)}$	$y` = u`(x)e^{u(x)}$
8) $y = ln\,u(x)$	$y` = \frac{u`(x)}{x}$
9) $y = u(x).v(x)$;	$y` = u`(x)v(x) + v`(x)u(x)$
10) $y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y` = \frac{u`(x)v(x) + v`(x)u(x)}{v^2(x)}$

11) $y = \sqrt{u(x)}$	$y^{`} = \dfrac{u^{`}(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
12) $y = tg\, u(x)$	$y^{`} = \dfrac{u^{`}(x)}{cos^{2} u(x)}$
13) $y = cotg\, u(x)$	$y^{`} = \dfrac{-u^{`}(x)}{sin^{2} u(x)}$
14) $y = arctg(x)$	$y^{`} = \dfrac{1}{1 + x^{2}}$
15) $y = arc\, cotg(x)$	$y^{`} = \dfrac{-1}{1 + x^{2}}$
16) $y = arctg\, (\frac{x}{a})$	$y^{`} = \dfrac{a}{a^2 + x^2}$
17) $y = arccotg\, (\frac{x}{a})$	$y^{`} = \dfrac{-a}{a^2 + x^2}$
18) $y = arc\, tg(u(x))$	$y^{`} = \dfrac{u^{`}(x)}{1 + u(x)^2}$
19) $y = arc\, cotg(u(x))$	$y^{`} = \dfrac{-u^{`}(x)}{1 + u(x)^2}$
20) $y = arc\sin(x)$	$y^{`} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
21) $y = arc\cos(x)$	$y^{`} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

22) $y = arc\sin(\frac{x}{a})$	$y^{`} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
23) $y = arc\cos(\frac{x}{a})$	$y^{`} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
24) $y = arc\ sin\ (u(x))$	$y^{`} = \frac{u^{`}(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$
25) $y = arc\cos(u(x))$	$y^{`} = \frac{-u^{`}(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$
26) $y = a^{u(x)}$	$y^{`} = a^{u(x)} \ln a . u^{`}(x)$; a>0