أمثلة محلولة على اختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة والمتسلسلات المتناوبة

$1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n}$

اختبار النسبة

$an = \frac{4^n}{n}$, $an + 1 = \frac{4^{n+1}}{n+1}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{an+1}{an} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{4^n}$

$=4 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} => 4(1) = 4 > 1$

المتسلسلة $\frac{4^n}{n}$ متباعدة

$2)\sum_{n=1} \left(\frac{2n+5}{n+1}\right) \quad 1n$

اختبار الجذر النوني

$= \lim_{n\to\infty} ((\frac{2n+5}{n+1})^{1n})^{\frac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+5}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+5}{n+1}\right) = 2 > 1$

المتسلسلة المتباعدة

$3)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

اختبار المقارنة

$n^3+1>n^3$

$$\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3} \Rightarrow \frac{n}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$$

المسلسلة $\frac{1}{n^3}$ مقارنة لأن $P>1$

و $\frac{n}{n^3+1} > \frac{1}{n^3}$

متقاربة $\sum \frac{1}{n^3+1}$

4) $\sum_{n=1} \frac{n}{n^2+2}$

اختبار المقارنة النسبي

bn $=\frac{1}{n}$

الحل

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} == \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2} \cdot \frac{n}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2} = 1 > 0$$

متباعدة $\frac{n}{n^2+2} \therefore \sum \frac{1}{n}$ متباعدة

إختبار راب

5) $\sum_{n=1} \frac{4}{n^2}$ $\quad =\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n^2}$

$$\frac{an+1}{an} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2$$

$$4 \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(1-n^2)}{(n+1)^2} \right) =$$

$$4 \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2} \right) =$$

$$4 \lim_{n\to\infty} n \frac{(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$4 \lim \frac{2n^2+1}{n^2+1^2} = 4 > 1$$

السلسلة متقاربة

6) $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

الدالة موجبة ومتصلة ومتناقصة

إذن نستخدم اختبار التكامل

اختبار التكامل

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dx$$

$$= \lim \int_{1}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}$$

$$= \lim_{a\to\infty} tany \int_{1}^{a} = \lim_{a\to\infty} [tana^{-1} - tan^{-1}]$$

$$= tna^{-1}\infty - \pi/4$$

$$= \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$$

هناك قيمة للتكامل ∴ المتسلسلة متقاربة

---

7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}.\frac{1}{n^2}\right|$ التقارب المطلق ∴ س المسلسلة

$|(-1)^{n+1}| = 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$متسلسلة متقاربة

ونستنتج$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{1}{n^2}$ متقاربة مطلقاً

اختبار المسلسلات المتناوبة

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}.(\frac{1}{n})$

an=$\frac{1}{n}$ الحل

$$\lim_{n\to\infty} an = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

an= $\frac{1}{n}$ =f (n) an=$\frac{1}{n}$⇒f(n)′ = $\frac{-1}{n^2}$ <0

الدالة f(n) متناقصة أي أن الحدود an متناقصة

وبذلك تكون المتسلسلة متقاربة

التقارب المشروط

9) $\sum_{n=1}(-1)^n \frac{5}{n}$=

an+1<anالمتسلسلة متقاربة

$$\lim_{n\to\infty} an = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |an| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$$

وهذه المتسلسلة متباعدة

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^a \ \frac{5}{n}$ متقاربة تقارب مشروط

10) $\sum_{n=}^{\infty} \frac{2}{n^4}$

اختبار القوى

an=$\frac{2}{n^4}$, P=4 , ∴P>1 تقاربية