معادلات الخطوط المستقيمة

Equations of Lines

سنلقي في هذه المحاضرة نظرة على **معادلة المستقيم في** $\mathbb{R}^3$.

كما لاحظنا في المحاضرة السابقة أن المعادلة $y = mx + b$ لا تمثل معادلة مستقيم في $\mathbb{R}^3$. هذا لا يعني أننا لا نستطيع أن نُعَبِرْ عن معادلة المستقيم في الفضاء $\mathbb{R}^3$. لكي نقوم بذلك نحتاج إلى طريقة جديدة للتعبير عن معادلة أي منحني في الفضاء $\mathbb{R}^3$. قبل الدخول في معادلة المستقيم في $\mathbb{R}^3$. نحتاج إلى أن نلقي نظرة على متجهات الدوال.

إن **متجه الدوال** (vector functions) هو **عبارة عن متجه مركباته تكون بشكل دوال بمتغير أو متغيرين أو أكثر**. و يمكن القول **انه عبارة عن دالة بمتغير أو متغيرين أو أكثر تأخذ شكل متجه**. يمكن إن يكون المتجه الذي يعبر عن هذه الدوال ثنائي أو ثلاثي أو رباعي أو ذي بعد n مثلاً.

و لكي نفهم **معنى متجه الدوال** و **طريقة رسمه**. لاحظ المثال أدناه:

ليكن

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle t, 1 \rangle$$

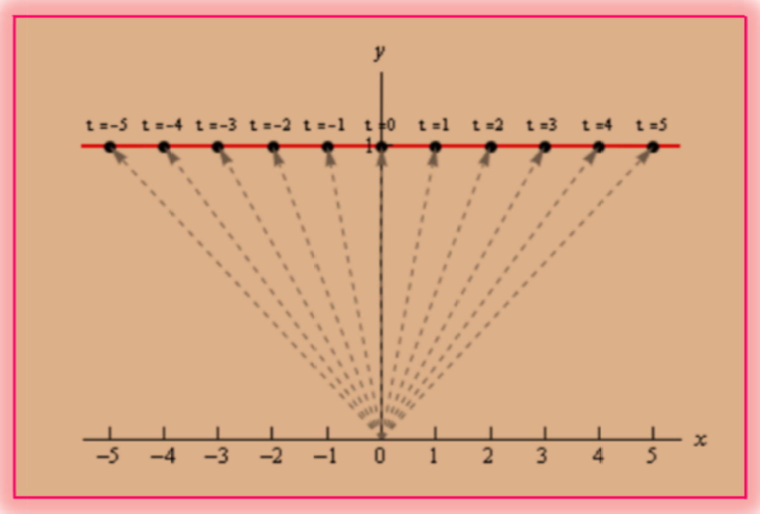
الدالة أعلاه عبارة عن متجه في $\mathbb{R}^2$. و ألان **دعنا نرسم تلك الدالة**. كل ما نفعله هو أن نعطي قيماً للمتغير t للحصول على متجهات الموقع المقابلة لها. و بعد رسم تلك المتجهات نصل رؤوسها للحصول على المنحني الذي يعبر عن متجه الدوال أعلاه.

لاحظ أن:

$$\overrightarrow{r(-3)} = \langle -3,1 \rangle,\ \ \overrightarrow{r(-1)} = \langle -1,1 \rangle,\ \ \overrightarrow{r(2)} = \langle 2,1 \rangle,$$

$$\overrightarrow{r(5)} = \langle 5,1 \rangle.$$

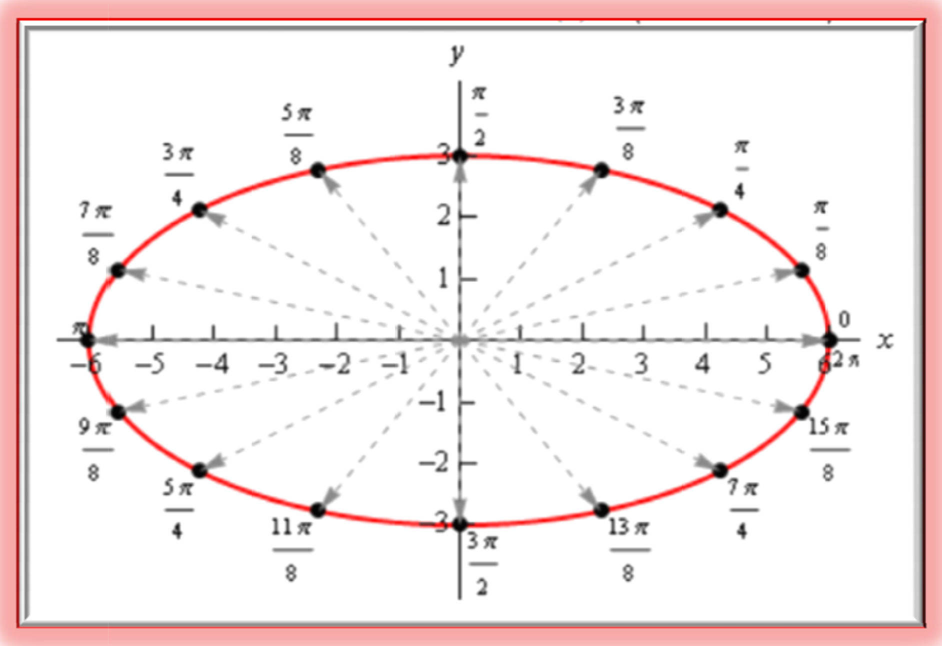
بعد تعين تلك المتجهات نصل جميع رؤوسها سنحصل على المنحني الذي يعبر عن الدالة أعلاه و هو في الحقيقة المستقيم $y = 1$.



و ألان لاحظ المثال الأتي:

$$\overrightarrow{r(t)} = \langle 6cost, 3sint \rangle$$

ويكون مخطط تلك الدالة كما نلاحظ أدناه:

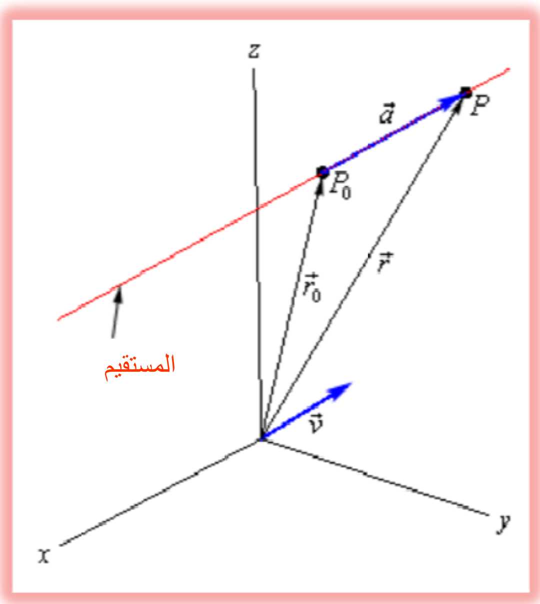


في هذه الحالة سنحصل على قطع ناقص ellipse.

و ألان دعنا نتوجه إلى كيفية **التعبير عن معادلة المستقيم في الفضاء** $\mathbb{R}^3$ باستخدام متجهات الدوال. للتعبير عن **معادلة خط مستقيم** في الفضاء **الفضاء** $\mathbb{R}^3$ نحتاج الى **الميل و نقطة تقع على الخط المستقيم**.

ملاحظة. إن ميل المستقيات في الفضاء $\mathbb{R}^3$ سوف لن يكون عدداً بسيطاً كما في ميل المستقيمات في الفضاء $\mathbb{R}^2$ و إنما سيكون متجه.

و ألان لتكن $P_0 = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$ **نقطة على المستقيم** المراد رسمه. و$\vec{v} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ **هو متجه موازي للمستقيم**. ولتكن $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ **أية نقطة على المستقيم**. و ألان لنرسم متجهي الموقع اللذين ينتهيان بالنقطتين $\boldsymbol{P}$ و P_0 و نسميهما $\vec{r}$ و $\vec{r_0}$ على الترتيب. كذلك دعنا نضع $\vec{a} = \overrightarrow{P\,P_0}$. انظر الرسم في الأسفل:



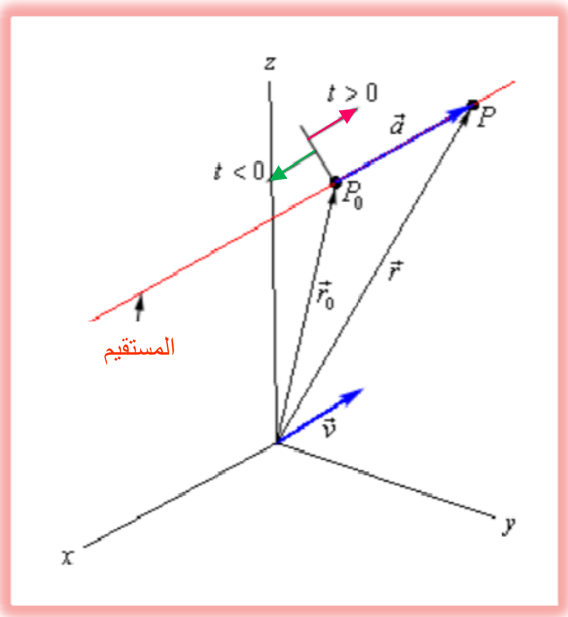
من الرسم أعلاه نستنتج أن:

لاحظ إن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{v}$ متوازيان لذا يوجد $t \in \mathbb{R}$ بحيث أن $\vec{a} = t\vec{v}$.

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle$$

نسمي المعادلة أعلاه **الصيغة الاتجاهية لمعادلة المستقيم** *vector form of the equation of a line*

إن الجزء الوحيد غير المعلوم في المعادلة أعلاه هو t لاحظ أن $t\vec{v}$ هو متجه يقع على امتداد المستقيم. إذا كانت $t > 0$ فإننا سنتحرك على المستقيم إلى **جهة اليمين** أما إذا كانت $t < 0$ فإننا سنتحرك على المستقيم إلى **جهة اليسار** عن نقطة الأصل. كما نلاحظ في الشكل أدناه:



هناك صيغ أخرى لمعادلة المستقيم:

لاحظ إن

$$\vec{r} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

من تساوي المتجهين نحصل على:

$$\boldsymbol{x = x_0 + ta}$$

$$\boldsymbol{y = y_0 + tb}$$

$$\boldsymbol{z = z_0 + tc}$$

تدعى مجموعة تلك المعادلات بالصيغ الوسيطة لمعادلة الخط المستقيم Parametric form of the equation of a line

هناك صيغة أخرى للتعبير عن الخط المستقيم.

لو نفرض أن a, b, c جميعها أعداد حقيقية موجبة. من المعادلات الوسيطة أعلاه نحصل على ما نسميه بالمعادلات التماثلية للخط المستقيم symmetric equations of the line :

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

و ألان دعنا نرى الأمثلة الآتية:

مثال1. اكتب كل الصيغ لمعادلة المستقيم المار عبر النقطتين

$(2,-1,3)$ و $(1,4,-3)$.

الحل:

لاحظ أن

$$\vec{v}=\langle 1,-5,6\rangle$$

لذا ستكون المعادلة الاتجاهية للمستقيم هي:

$$\vec{r}=\langle 2,-1,3\rangle+t\langle 1,-5,6\rangle=\langle 2+t,-1-5t,3+6t\rangle.$$

أما المعادلات الوسيطية للمستقيم هي:

$$x=2+t, \qquad y=-1-5t, \qquad z=\ 3+6t$$

أما **الصيغة التماثلية للمستقيم هي**:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-3}{6}$$

مثال2. بين فيما إذا كان المستقيم المار عبر النقطة $(0,-3,8)$ و الموازي للمستقيم المعطى بالمعادلات الوسيطة:

$$x=10+3t, \qquad y=12t, \qquad z=\ -3-t$$

يمر خلال المستوي $xz-$. إذا كان كذلك أعط إحداثيات النقطة التي يمر من خلالها المستقيم عبر المستوي $xz-$.

الحل. للجواب على السؤال نحتاج أن نكتب أولا معادلة المستقيم الجديد. هناك نقطة معلومة على المستقيم نحتاج فقط إلى متجه موازي للمستقيم. نحن نعلم إن المستقيم الجديد يجب أن يكون موازياً للمستقيم المعطى بالمعادلات الوسيطية أعلاه. و هذا يعني أن أي متجه يوازي هذا المستقيم المعطى بالمعادلات الوسيطية يكون موازياً للمستقيم الجديد أيضا. نحن نعلم انه في المعادلات الوسيطية للمستقيم تكون الأعداد المضروبة بـ t هي مركبات المتجه الموازي للمستقيم. لذا سيكون المتجه

$$\vec{v} = \langle 3,12,-1 \rangle$$

موازي للمستقيم المعطى بالمعادلات الوسيطية، و بالتالي سيكون موازي للمستقيم الجديد. لذا ستكون معادلة المستقيم الجديد هي:

$$\vec{r} = \langle 0,-3,8 \rangle + t\langle 3,12,-1 \rangle = \langle 3t,-3+12t,8-t \rangle$$

إذا كان هذا المستقيم يمر خلال المستوي– xz فان المركبة– y لنقطة المرور عبر المستوي– xz تكون مساوية إلى الصفر. لذلك دعنا نجعل المركبة y للمعادلة أعلاه مساوية إلى الصفر و نرى إن كان بالإمكان حلها بالنسبة إلى t أم لا. إذا أمكننا ذلك سنحصل على قيمة t التي بواسطتها يمكن المرور عبر المستوي– xz :

$$-3+12t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

و هذا يعني أن المستقيم يمر عبر المستوي– xz .

للحصول على باقي مركبات نقطة المرور عبر المستوي– xz نعوض عن قيمة $t = \frac{1}{4}$ في المعادلة أعلاه للحصول على

$$\vec{r} = \langle 3\left(\frac{1}{4}\right),-3+12\left(\frac{1}{4}\right),8-\frac{1}{4} \rangle = \langle \frac{3}{4},0,\frac{31}{4} \rangle$$

و بالتالي ستكون النقطة التي من خلالها يمر المستقيم الجديد عبر المستوي– xz هي $\left(\frac{3}{4},0,\frac{31}{4}\right)$.